Normalverteilung

Wir nennen eine Zufallsvariable Z **normalverteilt** mit den Parametern $\mu = E(Z)$ und σ^2, wenn ihre Dichte φ wie folgt definiert wird:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Bei den beiden Parametern handelt es sich um den Erwartungswert $\mu = E(Z)$ der Zufallsvariable Z und um deren Varianz σ^2.

Gilt $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, so handelt es sich um die **Standardnormalverteilung**.

Soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die Zufallsvariable Z in einem Intervall $[a, b]$ liegt, d.h. $P(a \leq Z \leq b)$, so kann diese Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden:

$$P(a \leq Z \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{Z-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Beispiel

Die Zufallsgröße Z sei normalverteilt mit den Parametern $\mu = 12$ und $\sigma = 3$. Berechne die Wahrscheinlichkeit $P(9 \leq Z \leq 15)$.
Wir können die gegebenen Angaben in die Formel einsetzen und wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(9 \leq Z \leq 15) =& \quad \Phi\left(\tfrac{15-12}{3}\right) - \Phi\left(\tfrac{9-12}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) \\ =& \quad \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2 \cdot \Phi(1) - 1 \approx 0,6827 \end{aligned}$$